Véletlen bolyongás

Alapprobléma: Dobjunk fel egy pénzérmét többször egymás után. Ha a kimenetel fej, akkor 1 Ft-ot nyerünk, ha írás: 1 Ft-ot veszítünk.

Jelölje S_n, $n = 1, 2, \ldots$ a nyeremény nagyságát az n. lépés után. $(S_0 = 0)$.

S_n tulajdonképpen ~~tulajdonképpen~~ nem más, mint a számegyenesen bolyongást végző részecske helyzete az n-ik lépés után, ha a részecske az origóból indult és p valószínűséggel lép $+1$-et, $1-p$ valószínűséggel -1-et.

Az $S_0, S_1, S_2, \ldots$ sorozatot véletlen bolyongásnak nevezzük.

Ha $p = \frac{1}{2}$, akkor szimmetrikus véletlen bolyongásról beszélünk.

A továbbiakban szimmetrikus esetet tárgyaljuk.

Az n-edik lépés után

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$

ahol X_i-k $(i = 1, 2 \ldots n)$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók! X_i lehetséges értékei: $+1, -1$ és $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$. $(i = 1, 2, \ldots, n)$

Ábrázolása a síkban törött vonal segítségével történhet. A pont a k-adik lépésben a sík (k, S_k) koordinátájú pontjába kerül. $(k = 1, 2, \ldots)$

A bolyongás trajektóriáit úgy ábrázolhatjuk, hogy az egymás utáni (k, S_k) pontokat szakaszokkal kötjük össze. Az így kapott törött vonal (trajektória) a bolyongó részecske egy útját szemlélteti.

Ha n lépésig vizsgáljuk a bolyongást, az origóból az (n, S_n) pontba 2^n lehetséges úton juthat el a részecske.
Szimmetrikus esetben minden trajektória (út) kialakulásának ugyanakkora a valószínűsége: 2^{-n}.
Például ha azt vizsgáljuk, hogy rögzített n lépésben milyen valószínűséggel jut a részecske az y pontba $(y \in \mathbb{Z})$:

$$P(S_n = y) = \binom{n}{a} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad , \text{ ahol}$$

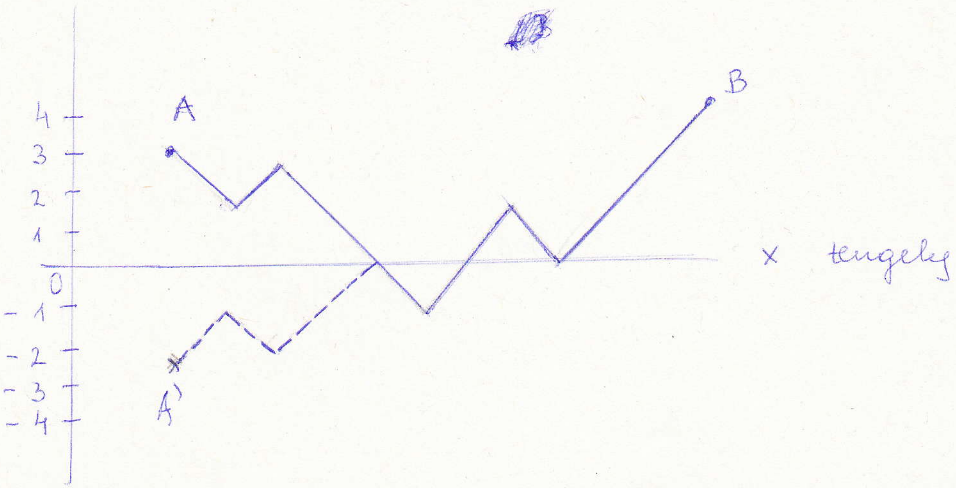
„a" jelenti a pozitív irányú lépések számát.
Ha „b"-vel jelöljük a negatív irányú lépések számát, akkor nyilván

$$n = a + b \quad \text{és} \quad y = a - b.$$

Vagyis a játék nyelvén megfogalmazva (lásd az Alapprobléma bekezdést): annak valószínűsége, hogy n dobás után y Ft-ot nyerek: $P(S_n = y) = \binom{n}{a}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \binom{n}{b}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Tükrözési elv

Legyen A és B az X tengely egyazon oldalán fekvő két pont. Jelölje A' az A-nak az X tengelyre vonatkozó tükörképét.
Ekkor az A-ból B-be vezető azon utak száma, amelyek érintik vagy metszik az X tengelyt, megegyezik A'-ből B-be vezető utak számával.



Tehát tükrözzük az X tengelyre az út A pont és az útnak az X tengellyel való első metszéspontja közötti szakaszát.
Ez a leképezés kölcsönösen egyértelmű az A-ból B-be vezető azon utak között, melyeknek van közös pontja az X tengellyel az és A'-ből B pontba vezető utak között. Így az utak száma egyenlő.

Visszatérések az origóba

Ha $S_{2k} = 0$, akkor a részecske a $2k$-adik időpontban az origóban tartózkodik. (Visszatérés csak páros lépésszámban történhet).
Annak valószínűsége, hogy a $2k$-adik időpontban visszatérés van: $P(S_{2k}=0) = u_{2k} = \binom{2k}{k} 2^{-2k}$

$k = 1, 2, \dots$ Nyilván $u_0 = P(S_0 = 0) = 1$.

Az origóba való visszatérés a pénzfeldobások esetén azt jelenti, hogy kiegyenlítődik a játék.
Ez a pénzfeldobások során többször is megtörténhet!

Első visszatérés

Ha $\{S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \ldots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} = 0\}$, akkor azt mondjuk, hogy a $2n$-edik lépésben tér vissza először a részecske az origóba. (Először egyenlítődik ki a játék).
Ennek valószínűségét f_{2n} jelöli:

$$f_{2n} = P(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \ldots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} = 0).$$

$n = 1, 2, \ldots \qquad f_0 = 0.$

Vizsgáljuk a bolyongást a $[0, 2n]$ intervallumon. ($2n$ időpontig)

f_{2k} jelölje annak valószínűségét, hogy az első visszatérés a $2k$-adik időpontban van:

$$f_{2k} = P(S_1 \neq 0, \ldots, S_{2k-1} \neq 0, S_{2k} = 0).$$

$k = 1, 2, \ldots, n.$

Állítás $\quad f_{2k} = u_{2k-2} - u_{2k} \quad ; (k \geq 1)$

Bizonyításához felhasználjuk a következő segédtételt:

Segédtétel: Annak valószínűsége, hogy a $2k$-adik lépésig nem tér vissza a részecske az origóba, egyenlő annak a valószínűségével, hogy a $2k$-adik lépésben visszatérés van. Azaz

$$P(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \ldots, S_{2k} \neq 0) = u_{2k}$$

Térjünk vissza az állítás bizonyításához:

legyen $A = \{ S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2k-1} \neq 0 \}$.

(Az első $2k-1$ lépésben nincs visszatérés)

$$B = \{ S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2k} \neq 0 \}$$

(Az első $2k$ lépésben nincs visszatérés.)

$B \subset A$ és $A \setminus B = \{ S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots S_{2k} = 0 \}$.

$$P(A \setminus B) = P(S_1 \neq 0, \dots S_{2k-1} \neq 0, S_{2k} = 0) = \underline{f_{2k}} =$$

$$= P(A) - P(B) = \underline{u_{2k-2} - u_{2k}}$$

(A segédtételt $P(A)$ illetve $P(B)$ felírásakor használtuk fel.)

<u>Következmény:</u>

1.) $f_{2k} = u_{2k-2} - u_{2k} = \binom{2k-2}{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-2} - \binom{2k}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} =$

$$= \frac{1}{2k-1} \cdot u_{2k} \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, n$$

(Az eredmény egyszerű számolgatással adódik).

A kétféle visszatérés között explicit összefüggés adható meg tehát.

2.) Megmutatható, hogy

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = (-1)^{k-1} \cdot f_{2k}$$

$\left[\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right) \dots \left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!} \right.$. Ebből közös nevezőre hozás, kiemelés és megfelelő bővítés után könnyen adódik, hogy $\binom{\frac{1}{2}}{k} = (-1)^{k-1} \cdot \binom{2k}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \cdot \frac{1}{2k-1}$

Vagyis $\binom{\frac{1}{2}}{k} = (-1)^{k-1} \cdot u_{2k} \frac{1}{2k-1} = (-1)^{k-1} \cdot f_{2k}$.]

Azaz $f_{2k} = (-1)^{k-1} \cdot \binom{\frac{1}{2}}{k}$.

Ebből az alábbi könnyen megkapható a generátorfüggvény:

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \binom{\frac{1}{2}}{k} \cdot z^{2k} =$$

$$= - \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (-z^2)^k =$$

Használjuk most az általános binomiális tételt.
(Emlékeztető: $(1+t)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} t^k$; $|t| < 1$; $\alpha \in R$)

$$= - \left[(1-z^2)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] = \underline{1 - \sqrt{1-z^2} = F(z)}$$

$F(z)$ az első visszatérések generátorfüggvénye.

Látható, hogy $F(1) = 1$, tehát szimmetrikus bolyongás esetén 1 valószínűséggel bekövetkezik az első visszatérés.

De várhatóan mikor? (Meddig kell várni a játékban az első kiegyenlítődésre?)

A várható érték meghatározásához a generátorfüggvény első deriváltját kell venni a $z = 1$ helyen:

$$F'(z) = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \quad ; \quad F'(1) = \infty$$

Szimmetrikus esetben tehát biztosan kiegyenlítődik a játék, de várhatóan végtelen ideig kell várni erre.

Megjegyzés: nem szimmetrikus bolyongás esetén

$$F(z) = 1 - \sqrt{1-4pq\,z^2}$$

(p annak valószínűsége, hogy pozitív irányba lép;
q " " " negatív " ". $p+q=1$

$\Rightarrow$ $F(1) = 1 - |p-q|$. Nem következik be biztosan az első visszatérés.

Utolsó visszatérés

Tétel: Egy bolyongást a $2n$-edik időpillanatig vizsgálva, annak valószínűsége, hogy a bolyongó részecske a $2k$-adik időpillanatban tér vissza utoljára az origóba

$$u_{2k} \cdot u_{2n-k} = \binom{2k}{k} \cdot \binom{2n-2k}{n-k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}; \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Bizonyítás: Olyan utakat keresünk, melyeknek a szögpontjai: $S_{2k} = 0$, $S_{2k+1} \neq 0, \ldots, S_{2n} \neq 0$.
Az út első $2k$ hosszúságú részét $2^{2k} \cdot u_{2k}$ féleképpen választhatjuk meg. (A $2k$-adik lépésben visszatérés van, ~~a többiről~~ az előzőekről nincs információ).
A fennmaradó $2n-2k$ hosszúságú úton már nem tér vissza. A segédtételünket felhasználva, és a $(2k, 0)$ pontot új origónak választva látható, hogy az út hátralévő részét $2^{2n-2k} \cdot u_{2n-2k}$ módon választhatjuk meg.
Kedvező utak száma: $u_{2k} \cdot 2^{2k} \cdot u_{2n-2k} \cdot 2^{2n-2k}$
Összes utak száma: 2^{n}

A kettő hányadosa annak valószínűsége, hogy a $2k$-adik lépésben tér vissza utoljára.

Jelölése
$$\alpha_{2k,2n} = u_{2k} \cdot u_{2n-2k} = \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

$k = 0, 1, \ldots, n$

Az $\{\alpha_{2k,2n}\ ;\ k = 0, 1, \ldots, n\}$ számhalmaz valószínűségeloszlást alkot: n-ed rendű <u>diszkrét arkusz szinusz eloszlás</u>.

Megjegyzés: Az utolsó visszatérés a szerencsejátékok nyelvén azt jelenti, hogy az egyik fél átveszi a vezetést.

Végül nézzünk egy <u>példát</u> a tükrözési elv alkalmazására:

Tegyük fel, hogy egy választás során P jelölt p számú, Q jelölt q számú szavazatot kapott. P nyerte a választást, tehát $p > q$.

Mennyi a valószínűsége, hogy a szavazat-számlálás során mindvégig P jelölt vezetett?

A szavazatszámlálás szemléltethető egy $p+q$ hosszúságú úttal. A részecske az origóból indul, és ha a szavazatot P kapta, akkor jobbra lép egy egységet, ha Q kapta a szavazatot, akkor balra lép egy egységet.

S_k azon szavazatok száma, amennyivel P vezet, illetve hátrányban van a k-adik szavazat megszámlálása után.

P akkor vezet a teljes szavazatszámlálás során, ha $S_1 > 0$, $S_2 > 0, \dots, S_n > 0$; $n = p + q$.
Tehát ha minden szögpont az x tengely fölött van.
Minden ilyen út átmegy az (1, 1) ponton.
Vagyis a megfelelő utak száma pontosan annyi, mint az olyan utak száma, amelyek az (1, 1) pontból az $(n, p-q)$ pontba mennek úgy, hogy nem érintik és nem is metszik az x tengelyt. A tükrözési elv alapján ezek úgy kaphatók meg, hogy az (1, 1) pontból az $(n, p-q)$ pontba vezető összes utak számából kivonjuk az (1, −1) pontból az $(n, p-q)$ pontba vezető utak számát. Mivel $n = p + q$, így a kedvező utak száma:

$$\binom{p+q-1}{p-1} - \binom{p+q-1}{p}$$

A különbség értéke $: \binom{p+q}{p} \cdot \frac{p-q}{p+q}$
(Azaz a kedvező utak száma)

Összes utak száma $: \binom{p+q}{p}$

Így a keresett valószínűség $: \frac{p-q}{p+q}$

<u>Feladat</u> Írjuk fel a diszkrét arkusz szinusz eloszlás elemeit $n = 2$ esetén!