Generátorfüggvények

Definíció: legyen $a_0, a_1, \dots$ valós számok egy sorozata.
Ha a $G(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_k z^k + \dots$
végtelen sor konvergál valamilyen intervallumban, akkor azt mondjuk, hogy $G(z)$ az a_j $(j = 0, 1, 2, \dots)$ sorozat generátorfüggvénye.

Ha az a_j $(j = 0, 1, \dots)$ sorozat korlátos, akkor $G(z)$ konvergens $|z| < 1$ esetén.
Ugyanis ha $|a_j| < K$, $j = 0, 1, 2, \dots$, akkor

$$G(z) < K(1 + z + \dots + z^k + \dots).$$

A zárójelben egy végtelen mértani sor áll, amely akkor konvergens, ha $|z| < 1$.

Például: $a_j = \frac{1}{j!}$ $(j = 0, 1, 2, \dots)$ A sorozat generátorfüggvénye $G(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} z^j = e^z$.

Másik példa: Egy kockát egyszer feldobok. ξ valószínűségi változó legyen a kockadobás eredménye.
Mi lesz ξ generátorfüggvénye?
Itt $a_i = P(\xi = i) = \frac{1}{6}$; $i = 1, 2, \dots, 6$

Tehát $G_\xi(z) = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} z^i = \frac{z^1 + z^2 + \dots + z^6}{6}$.

Definíció: legyen ξ nem negatív egész értékű valószínűségi változó. Generátorfüggvénye:

$$G_\xi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\xi = k) \cdot z^k.$$

$G_\xi(z)$ konvergens, ha $|z| < 1$.

Vegyük észre, hogy ξ generátorfüggvénye nem más, mint a z^{ξ} valószínűségi változó várható értéke!

$$G_{\xi}(z) = E(z^{\xi}) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{k} \cdot P(\xi = k)$$

A generátorfüggvény a valószínűségi változóval kapcsolatos minden információt magában rejt.

Tulajdonságai:

1.) $G_{\xi}(0) = P(\xi = 0)$

Általában: $\dfrac{G^{(k)}(0)}{k!} = P(\xi = k)$; $k = 0, 1, 2, \ldots$

(Azaz a generátorfüggvény z szerinti k-adik deriváltja segítségével meghatározható az eloszlás k-adik tagja)

Ugyanis ha a $G_{\xi}(z) = P(\xi=0) + z \cdot P(\xi=1) + \ldots + z^{k} P(\xi=k) + \ldots$ végtelen tagú összeget k-szor egymás után deriváljuk z-szerint, akkor az első $k-1$ tag eltűnik, a k-adik tag: $k!\, P(\xi=k)$. A többi tagban megmarad z, de $z=0$ helyen mindegyik 0 lesz.

2.) $G'_{\xi}(1) = E\xi$

Azaz ξ várható értéket úgy is megkaphatjuk, ha a z szerinti első deriváltat vesszük a $z = 1$ helyen.

Valóban: $G_{\xi}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\xi = k) \cdot z^{k}$

$$G'_{\xi}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot z^{k-1} P(\xi = k);$$ z helyébe

1-et írva pontosan $E\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(\xi = k)$ adódik.

3.) ξ szórásnégyzetének meghatározásához a generátorfüggvény első és második deriváltja szükséges:

$$D^2 \xi = G''_\xi(1) + G'_\xi(1) - \left[G'_\xi(1)\right]^2$$

Ennek igazolását ki-ki önállóan végezze el!

4.) Ha ξ és η független, nem negatív egész értékű valószínűségi változók, akkor összegük generátorfüggvénye az egyes generátorfüggvények szorzata: $G_{\xi+\eta}(z) = G_\xi(z) \cdot G_\eta(z)$

Bizonyítása a diszkrét esetre vonatkozó konvolúció felhasználásával történik.

Az állítás n tagú összeg esetén is igaz: ha $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ független, nem negatív egész értékű valószínűségi változók, akkor

$$G_{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n}(z) = G_{\xi_1}(z) \cdot G_{\xi_2}(z) \cdots G_{\xi_n}(z).$$

Például: legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ független, azonos p paraméterű Bernoulli-eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg az összeg generátorfüggvényét: $G_{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n}(z) = ?$

Az előző állítás miatt

$$G_{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n}(z) = G_{\xi_1}(z) \cdot G_{\xi_2}(z) \cdots G_{\xi_n}(z) = \left[G_{\xi_1}(z)\right]^n$$

Az utolsó egyenlőség azért igaz, mert a valószínűségi változók itt azonos eloszlásúak:

$$\xi_i = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

$P(\xi_i = 1) = p$; $P(\xi_i = 0) = 1 - p = q$; $p + q = 1$

Tehát a generátorfüggvényük is ugyanaz a függvény.

$$G_{\xi_1}(z) = z^0 \cdot P(\xi = 0) + z \cdot P(\xi = 1) = q + p \cdot z$$

Így az összeg generátorfüggvénye:

$$G_{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}(z) = (q + p \cdot z)^n .$$

Ez pedig pontosan az (n, p) paraméterű binomiális eloszlás generátorfüggvénye, mert ha η valószínűségi változó (n, p) paraméterű binomiális eloszlású, akkor

$$G_\eta(z) = \sum_{k=0}^{n} P(\xi = k) \cdot z^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot z^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pz)^k (1-p)^{n-k} = [pz + (1-p)]^n .$$

(Ezzel ismét igazolást nyert az a jólismert tény, hogy független Bernoullik összege binomiális).

5.) Ha $\xi_1, \xi_2, \dots$ nem negatív egész értékű valószínűségi változók sorozata eloszlásban konvergál a ξ valószínűségi változóhoz, akkor a generátorfüggvényeik sorozata is konvergál ξ generátorfüggvényéhez minden $z \in [-1, 1]$ esetén. Az állítás megfordítása is igaz.

Jelölésekkel: ha $\lim_{n \to \infty} P(\xi_n = k) = P(\xi = k)$, akkor

$(k = 0, 1, 2, \dots)$ $\qquad \lim_{n \to \infty} G_{\xi_n}(z) = G_\xi(z) \quad \forall z \in [-1, 1]$

Korábban beláttuk, hogy az (n, p) paraméterű binomiális eloszlás eloszlásban konvergál a λ paraméterű Poisson eloszláshoz, ha $n \cdot p = \lambda$ állandó.
Nézzük meg, hogy mihez konvergál a generátorfüggvények sorozata: $G_{\xi_n}(z) = [pz + (1-p)]^n$.

Itt most $p = \frac{\lambda}{n}$, tehát

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{\lambda}{n} z + 1 - \frac{\lambda}{n} \right)^n = \lim_{n \to \infty} \left[1 + \frac{\lambda}{n} (z-1) \right]^n =$$

$$= e^{\lambda(z-1)} = e^{-\lambda + \lambda z}$$

(Felhasználtuk, hogy $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = e^y \; ; y \in \mathbb{R}$)

A kapott $e^{-\lambda + \lambda z}$ függvény pedig pontosan a λ paraméterű Poisson eloszlás generátorfüggvénye, ugyanis definíció szerint felírva a Poisson generátorfüggvényére a következőt kapjuk:

$$G_{\xi}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\xi = k) \cdot z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \cdot z^k =$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda z} = e^{-\lambda + \lambda z}$$

(Felhasználtuk, hogy $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$)

Példa: Egy pont bolyong a számegyenesen: az origóból indul ki és p valószínűséggel jobbra lép egy egységet, $1-p=q$ valószínűséggel balra, függetlenül az előző lépéseitől.
Várhatóan hány lépés során jut el a számegyenes $+1$ pontjába?
Jelölje ξ a szükséges lépésszámot! $E\xi = ?$
Határozzuk meg a ξ generátorfüggvényét, a következő képpen: $G_\xi(z) = E(z^\xi)$.
~~Legyen~~ Jelentse az A esemény azt, hogy az első lépés jobbra történik, $\bar{A}$: az első lépés balra történik.
$E(z^\xi)$ várható érték a teljes várható érték tétele alapján:

$$E(z^\xi) = E(z^\xi / A) \cdot P(A) + E(z^\xi / \bar{A}) \cdot P(\bar{A})$$

Ha először jobbra lép, akkor $\xi = 1$, vagyis

$$E(z^\xi / A) = z$$

Ha $\bar{A}$ következik be, akkor a -1 pontból kell eljusson a $+1$ pontba. Ekkor a szükséges lépésszám: $\xi = \xi_1 + \xi_2 + 1$, ahol ξ_1 jelenti a szükséges lépésszámot -1-ből az origóba; ξ_2 jelenti a szükséges lépésszámot az origóból a $+1$ pontba. ξ_1 és ξ_2 egymástól független valószínűségi változók és ξ-vel azonos eloszlásúak. (Mindannyian a szomszédos pontba jutás lépésszámai).

Így $E(z^{\xi}/\bar{A}) = E(z^{\xi_1+\xi_2+1}) = z\cdot E(z^{\xi_1})\cdot E(z^{\xi_2})$

$P(A)=p \qquad P(\bar{A}) = 1-p = q$

Tehát

$$G_{\xi}(z) = E(z^{\xi}) = z\cdot p + z\cdot q\left[G_{\xi}(z)\right]^2$$

(Kihasználtuk, hogy ξ, ξ_1, ξ_2 azonos eloszlásúak, így $E(z^{\xi_1}) = E(z^{\xi_2}) = E(z^{\xi}) = G_{\xi}(z)$).

ξ generátorfüggvényére egy másodfokú egyenletet kapunk: $G_{\xi}(z) = zp + z\cdot q\left[G_{\xi}(z)\right]^2$.

$$z\cdot q\left[G_{\xi}(z)\right]^2 - G_{\xi}(z) + zp = 0$$

Ebből: $G_{\xi}(z) = \dfrac{1\pm\sqrt{1-4z^2pq}}{2zq}$

A két megoldás közül az lehet generátorfüggvény, amely $z=0$ helyen korlátos.

Tehát $G_{\xi}(z) = \dfrac{1-\sqrt{1-4z^2pq}}{2zq}$

a szükséges lépésszám generátorfüggvénye.

$$G_{\xi}(1) = \frac{1-\sqrt{\cancel{4p}\,1-4pq}}{2q} = \frac{1-\sqrt{(p-q)^2}}{2q} = \frac{1-|p-q|}{2q} =$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{ha } p \geq q \\ \dfrac{p}{q}, & \text{ha } p < q. \end{cases}$$

Csak akkor éri el biztosan a $+1$ pontot, ha $p \geq q$.

A generátorfüggvény segítségével a keresett várhatóérték : $E\xi = G'_\xi(1)$.

$G_\xi(z)$ függvényt z szerint deriváljuk, majd vesszük a $z=1$ pontban. (A részletszámításokat végezzük el otthon!)

Eredmény :

$$\underline{E\xi} = G'_\xi(1) = \underline{\frac{2p}{|p-q|} - \frac{1-|p-q|}{2q}},$$

Mi látható ebből ?

- ha $p=q=\frac{1}{2}$, vagyis ha szimmetrikus a bolyongás, akkor a várható szükséges lépésszám (várható várakozási idő) : végtelen
- ha $p>q$, akkor $E\xi = \frac{2p}{p-q} - 1 = \frac{1}{p-q}$

Csak akkor véges a várható lépésszám, ha nagyobb valószínűséggel lép jobbra, mint balra.

<u>Feladatok</u>

1.) ξ legyen nem negatív egész értékű valószínűségi változó.
$G_\xi(1) = ?$

2.) ξ nem negatív egész értékű valószínűségi változó. Határozza meg $\xi+5$ generátorfüggvényét!

Feladatok

3.) Határozza meg a p paraméterű geometriai eloszlás generátorfüggvényét!

4.) Tudjuk, hogy r db független p paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változó összege r-ed rendű, p paraméterű negatív binomiális eloszlású.
A 3.) feladatot felhasználásával írja fel az r-ed rendű, p paraméterű negatív binomiális generátorfüggvényét!