A klasszikus tönkremenési probléma

Egy szerencsejátékos (J) minden játszmánál p $(0<p<1)$ valószínűséggel nyer 1 Ft-ot és q valószínűséggel veszít 1 Ft-ot. $p+q=1$.
Tegyük fel, hogy alaptőkéje z Ft, ellenfelének alaptőkéje $(a-z)$ Ft. Kettőjük össztőkéje a Ft.
A játék addig folytatódik, míg J vagy ellenfele tönkremegy: J tőkéje „a"-ra nő, vagy nullára csökken.
Bolyongás nyelvén fogalmazva:
A bolyongó részecske (pont) az X tengely z pontjában van és időegységenként egységnyit lép jobbra vagy balra p, illetve $(1-p)$ valószínűséggel.
Így n lépés után a helyzete éppen J n játszma utáni tőkéjének felel meg. $(n=1,2,\dots)$
A bolyongás abban a pillanatban fejeződik be, amikor a pont eléri az „a" pontot, vagy visszatér az origóba.
Az $x=0$ és az $x=a$ pontokat elnyelő falaknak hívjuk.
A pont tehát az elnyelő falak között nem szimmetrikus bolyongást végez, ha $p\neq q$.
A bolyongás csak az $1,2,\dots,a-1$ pontokra korlátozódik.
Ha $a\to\infty$, akkor egy félegyenesen megy végbe: $x=z>0$ pontból indul és addig bolyong, míg először az $x=0$ pontba ér.
(Első elérési probléma)

Mennyi J tönkremenésének valószínűsége ?

Jelölje q_z annak valószínűségét, hogy J z Ft alaptőkével tönkremegy ; p_z annak valószínűségét, hogy J z Ft alaptőkével győz.

$q_z = P($az $x = z$ pontból induló részecske az $x = 0$ pontban elnyelődik$)$

$p_z = P($az $x = z$ pontból induló részecske az $x = a$ pontban elnyelődik$)$

$p_z + q_z = 1$.

Feladat : q_z meghatározása.

Az első játszma után J-nek $(z-1)$ vagy $(z+1)$ Ft-ja lesz.

A teljes valószínűség tételét alkalmazva

$$q_z = P(J \text{ tönkremegy} \mid X_1 = -1) \cdot P(X_1 = -1) + P(J \text{ tönkremegy} \mid X_1 = 1) \cdot P(X_1 = 1)$$

$$q_z = q \cdot q_{z-1} + p \cdot q_{z+1} \quad \text{feltéve, hogy } 1 < z < a-1$$

[Az $\{X_1 = -1\}$ esemény azt jelenti, hogy az első játszmában 1 Ft-ot veszített ; $\{X_1 = +1\}$ esemény azt, hogy nyert 1 Ft-ot az első játszmában].

Ha $z = 1$, akkor $q + p \cdot q_2 = q_1$;

ha $z = a-1$, akkor $q_{a-1} = q \cdot q_{a-2}$

Továbbá: P(J játékos „a" Ft tőkével tönkremegy) = 0
P(J játékos 0 Ft tőkével tönkremegy) = 1.

Tehát q_z valószínűségre a következő differenciaegyenlet adódik:

$$\boxed{\begin{array}{l} q_z = q \cdot q_{z-1} + p \cdot q_{z+1} \\ \text{ahol } 1 < z < a-1 \text{; Peremfeltételek: } q_a = 0 \text{ és } q_0 = 1 \end{array}} \quad (*)$$

* differencia egyenlet megoldása

a) ha $p \neq q$ (Nem szimmetrikus a bolyongás).

Ekkor * differencia egyenletnek két különböző partikuláris megoldása: ~~van:~~

$$q_z = 1 \quad \text{és} \quad q_z = \left(\frac{q}{p}\right)^z$$

(Behelyettesítéssel meggyőződhetünk róla).

* általános megoldása:

$$q_z = A + B\left(\frac{q}{p}\right)^z, \text{ ahol } A \text{ és } B$$

konstansokat a peremfeltételek segítségével számíthatjuk ki.

$$q_0 = 1 = A + B$$

$$q_a = 0 = A + B\left(\frac{q}{p}\right)^a$$

Az egyenletrendszert megoldva:

$$A = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a}{\left(\frac{q}{p}\right)^a - 1} \qquad B = \frac{1}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a}$$

Tehát * peremfeltételeknek eleget tevő megoldása

$$\boxed{q_z = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^z}{\left(\frac{q}{p}\right)^a - 1}}$$

$\mathcal{J}$ tönkremenésének valószínűsége, ha $p \neq q$.

(A megoldás egyértelműségével most nem foglalkozunk).

b.) ha $p = q = \frac{1}{2}$ (szimmetrikus a bolyongás), akkor a kapott eredmény nem alkalmazható. (A két partikuláris megoldás egybeesik).

Ekkor $q_z = 1$ és $q_z = z$ két különböző partikuláris megoldás.

Ekkor * általános megoldása

$$q_z = A + Bz \quad , \text{ ahol } q_0 = 1 = A \text{ és } q_a = 0 = A + B \cdot a.$$

Vagyis $A = 1$ és $B = -\frac{1}{a}$.

$$\boxed{q_z = 1 - \frac{z}{a}}$$

$\mathcal{J}$ tönkremenési valószínűsége, ha $p = q = \frac{1}{2}$.

Megjegyzés 1.) Átfogalmazható a probléma így is:
J végtelenül gazdag ellenféllel játszik. J tetszésére van bízva, hogy mikor hagyja abba.
Stratégiája az, hogy vagy elveszíti az összes pénzét, vagy tőkéje „a" Ft-ra növekszik.
Ezzel a stratégiával q_z valószínűséggel veszíti el az összes pénzét és $1-q_z$ valószínűséggel tőkéje „a" Ft-ra nő.

2.) Ha a tétet megváltoztatjuk, pl. az egyszeri tétet 1 Ft-ról $\frac{1}{2}$ Ft-ra csökkentjük, ez ekvivalens a kezdeti tőke megduplázódásával.
Ekkor J végső tönkremenésének valószínűsége:

$$q_{2z} = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{2a} - \left(\frac{q}{p}\right)^{2z}}{\left(\frac{q}{p}\right)^{2a} - 1}, \text{ ha } p \neq q \text{ és}$$

$$q_{2z} = 1 - \frac{2z}{2a}, \text{ ha } p = q = \frac{1}{2}.$$

3.) Legyen ξ valószínűségi változó J végső nyeresége. Határozzuk meg J várható nyereségét: $E\xi = ?$

ξ értékei: $-z$, $a-z$ eloszlása

$$P(\xi = -z) = q_z\,;\quad P(\xi = a-z) = p_z$$

$$E\xi = -z \cdot q_z + (a-z)\,p_z. \text{ Mivel } p_z + q_z = 1, \text{ így}$$

$$\underline{E\xi = a(1-q_z) - z,}$$

Ha $E\xi = 0$, akkor $q_z = 1 - \frac{z}{a}$.

Ha $q_z = 1 - \frac{z}{a}$, akkor $E\xi = 0$.

Tehát $\mathcal{J}$ várható nyeresége akkor és csakis akkor nulla, ha $p = q = \frac{1}{2}$.

(Az igazságos játék igazságos marad).

A játék várható időtartama

Eloszlás ismerete nélkül is meghatározható.

Jelölje D_z a játék időtartamának várható értékét. Tételezzük fel, hogy D_z véges.

Jelentse ξ a játék időtartamát.

$$D_z = E\xi, \text{ ha } \mathcal{J} \text{ kezdeti tőkéje } z \text{ Ft.}$$

$$E\left(\xi \mid \{1.\text{ játszma } \mathcal{J}\text{-nek kedvező}\}\right) = D_{z+1}$$

$$E\left(\xi \mid \{1.\text{ játszma } \mathcal{J}\text{-nek kedvezőtlen}\}\right) = D_{z-1}$$

Ekkor $D_z = 1 + p \cdot D_{z+1} + q \cdot D_{z-1} \quad (0 < z < a)$,

ahol $D_0 = 0$ és $D_a = 0$ természetes feltételek.

A játék várható időtartamára a következő differencia egyenletet kapjuk:

$$D_z = 1 + p \cdot D_{z+1} + q \cdot D_{z-1}, \quad (0 < z < a)$$

$D_0 = 0$ és $D_a = 0$ peremfeltételekkel.

Nem homogén differencia egyenlet.

$\boxtimes$ megoldása a következő:

$$D_z = \frac{z}{q-p} - \frac{a}{q-p} \cdot \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^z}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^a}, \text{ ha } p \neq q$$

$$D_z = z(a-z), \text{ ha } p = q = \frac{1}{2}$$

Ez a klasszikus tönkremenési problémában a játék várható időtartama.

Például, ha a játékosoknak 500-500 Ft-ja van; és 1 Ft-os egyedi téttel addig játszanak, míg valamelyikük tönkremegy, akkor $p = q = \frac{1}{2}$ esetén várhatóan 250 000 játszmára van szükség.